

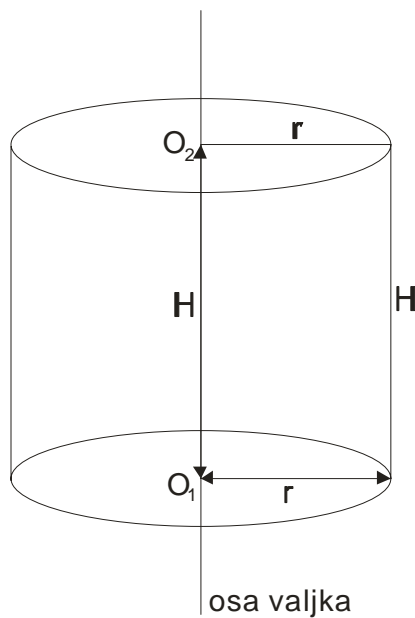
VALJAK

Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi čije su izvodnice normalne na ravan tih krugova.

Osa valjka je prava koja prolazi kroz centre baza.

Naravno kao i do sada oznake su:

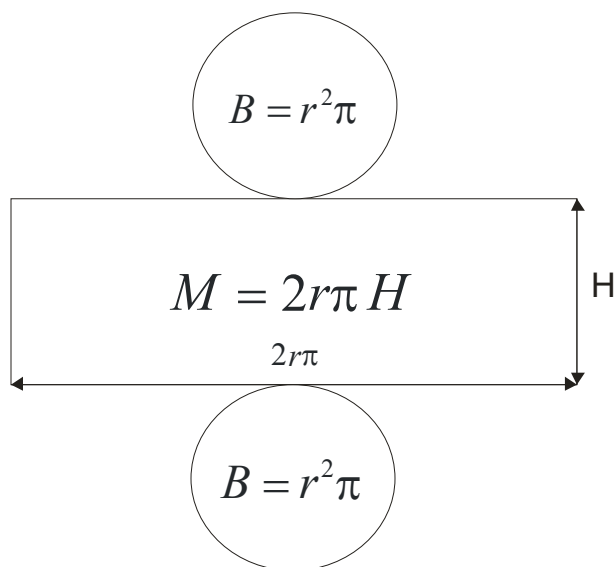
- P je površina valjka
- V je zapremina valjka
- B je površina baze
- M je površina omotača
- H je visina valjka
- r je poluprečnik osnove (baze), onda je $2r$ prečnik



Početne formule za površinu i zapreminu valjka iste su kao i formule za P i V prizme:

$$P = 2B + M \quad \text{i} \quad V = B \cdot H$$

Pre nego li sklopimo formule za P i V pogledajmo mrežu valjka:



Baze su očigledno krugovi čija je površina :

$$B = r^2 \pi$$

Omotač je pravougaonik čije su stranice visina H i obim kruga $O = 2r\pi$, pa je površina omotača jednaka

$$M = 2r\pi H$$

$$P = 2B + M$$

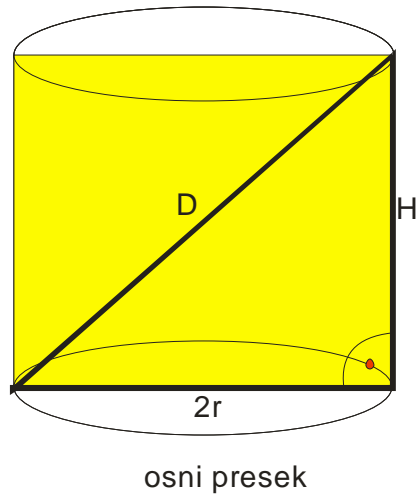
$$V = B \cdot H$$

$$P = 2r^2 \pi + 2r\pi H$$

$$V = r^2 \pi H$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

Pogledajmo sada kako izgleda osni presek valjka:

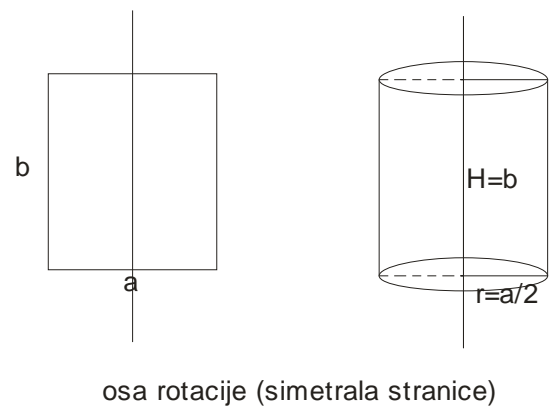
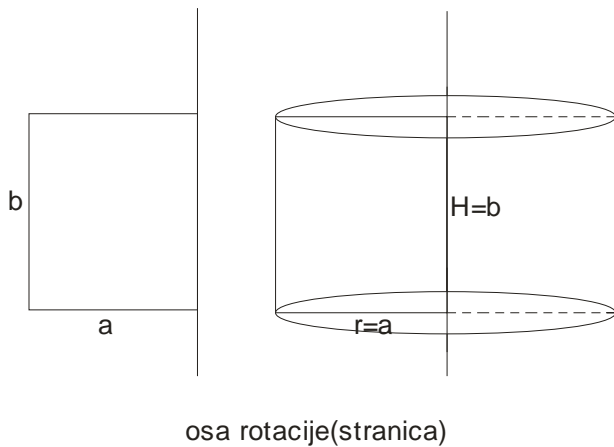


Ovde primenjujemo Pitagorinu teoremu: $D^2 = (2r)^2 + H^2$

Površina osnog preseka je $P_{op} = 2rH$

Ako u tekstu zadatka kaže da je valjak **RAVNOSTRAN**, to znači da mu je osni presek kvadrat i da je $H = 2r$

Napomenimo još da valjak može nastati obrtanjem kvadrata ili pravougaonika oko jedne stranice ili simetrale stranice.



1) Izračunati zapreminu pravog valjka ako je data površina $P = 324\pi\text{cm}^3$ i odnos visine prema poluprečniku $H : r = 7 : 2$.

$$P = 324\pi\text{cm}^3$$

$$H : r = 7 : 2$$

$$V = ?$$

Kako imamo datu razmeru, upotrebićemo "trik sa k" $H : r = 7 : 2 \Rightarrow \begin{cases} H = 7k \\ r = 2k \end{cases}$

Obrazac za površinu je:

$P = 2r\pi(r + H)$	$H = 7 \cdot 3 = 21\text{cm}$
$324\cancel{\pi} = 2 \cdot 2k \cdot \cancel{\pi}(2k + 7k)$	$r = 2 \cdot 3 = 6\text{cm}$
$324 = 4k \cdot 9k$	$V = r^2\pi H$
$324 = 36k^2$	$V = 6^2 \cdot \pi \cdot 21$
$k^2 = 9$	$V = 756\pi\text{cm}^3$
$k = 3$	

2) Površina pravog valjka je $84\pi\text{cm}^2$, a visina mu je za 5cm veća od prečnika osnove. Izračunati zapreminu valjka.

$$P = 84\pi\text{cm}^2$$

$$H = 2r + 5$$

$$V = ?$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

$$84\pi = 2r\pi(r + 2r + 5)$$

$$84 = 2r(3r + 5)$$

$$84 = 6r^2 + 10r$$

$$6r^2 + 10r - 84 = 0$$

$$3r^2 + 5r - 42 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm 23}{6}$$

$$r_1 = \frac{-5 + 23}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

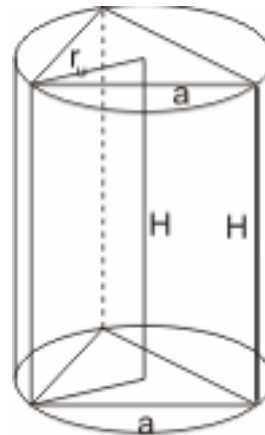
$$r_2 = \frac{-5 - 23}{6} \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Dakle $r = 3\text{cm}$

$H = 2r + 5$	$V = r^2\pi H$
$H = 2 \cdot 3 + 5$	$V = 3^2 \pi \cdot 11$
$H = 11\text{cm}$	$V = 99\pi\text{cm}^3$

3) Od drvenog valjka poluprečnika osnove $r = 9\text{cm}$, visine $H = 12\text{cm}$ istesana je najveća moguća pravilna trostrana prizma. Kolika je zapremina odpadaka?

- Najveća prizma je ona koja je upisana u valjak
- Visine prizme i valjka su jednake
- Zapreminu odpadaka ćemo dobiti kad od zapremine valjka oduzmemo zapreminu prizme!



$$r = 9\text{cm}$$

$$H = 12\text{cm}$$

$$V_{OD} = V_v - V_P$$

Nadjimo najpre stranicu prizme.

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = r_o$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 9$$

$$a\sqrt{3} = 27$$

$$a = \frac{27}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{27}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{27\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 9\sqrt{3}\text{cm}$$

$$V_{OD} = V_v - V_P$$

$$V_{OD} = r^2\pi H - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$V_{OD} = H \left(r^2\pi - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$V_{OD} = 12 \left(9^2\pi - \frac{(9\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \right)$$

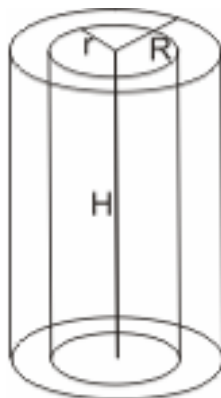
$$V_{OD} = 12 \left(81\pi - \frac{243\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$V_{OD} = 12 \left(\frac{324\pi - 243\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$V_{OD} = 3 \cdot 81(4\pi - 3\sqrt{3})$$

$$V_{OD} = 243(4\pi - 3\sqrt{3})\text{cm}^3$$

4) Izračunati površinu šupljeg valjka čija je visina $H = 25\text{cm}$, poluprečnik spoljašnjeg omotača $R = 15\text{cm}$, a unutrašnjeg je $r = 6\text{cm}$



$$H = 25\text{cm}$$

$$R = 15\text{cm}$$

$$r = 6\text{cm}$$

$$P = ?$$

Razmišljamo:

→ Površina šupljeg valjka se sastoji iz omotača većeg valjka, omotača manjeg valjka i dve baze koje čine kružni prsteni.

$$\text{Dakle: } P = M_1 + M_2 + 2B$$

M_1 → Omotač većeg valjka

$$M_1 = 2R\pi H = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 25 = 750\pi \text{ cm}^2$$

M_2 → Omotač manjeg valjka

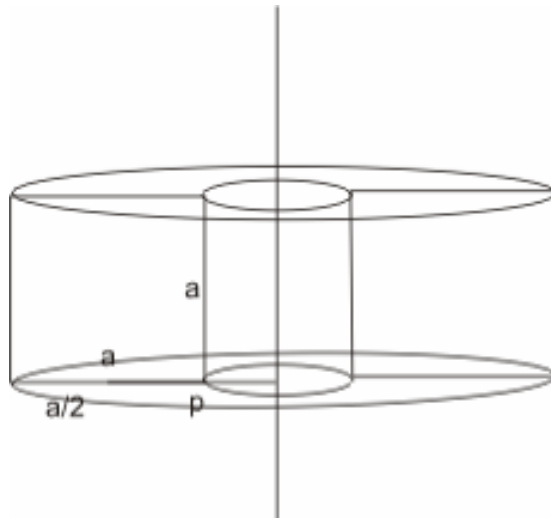
$$M_2 = 2r\pi H = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 25 = 300\pi \text{ cm}^2$$

$$B = (R^2 - r^2)\pi = (15^2 - 6^2)\pi = 189\pi \text{ cm}^2$$

$$P = 750\pi + 300\pi + 2 \cdot 189\pi$$

$$\boxed{P = 1428\pi \text{ cm}^2}$$

5) Kvadrat stranice a rotira oko ose koja je od centra kvadrata udaljena za p ($p > \frac{a}{2}$). Odrediti zapreminu obrtnog tela ako je osa paralelna stranici kvadrata i leži u njegovoj ravni.



Razmišljamo:

→ Na ovaj način smo ustvari dobili šuplji valjak.

→ Poluprečnik osnove većeg valjka je $R = p + \frac{a}{2}$

→ Poluprečnik osnove manjeg valjka je $r = p - \frac{a}{2}$

→ Visine oba valjka su iste ako i stranica kvadrata, tj. $H = a$

→ Zapreminu šupljeg valjka ćemo dobiti kad od zapremine većeg oduzmemo zapreminu manjeg valjka!!!

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = R^2\pi H - r^2\pi H$$

$$V = \pi H(R^2 - r^2)$$

$$V = \pi H \left[\left(p + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(p - \frac{a}{2} \right)^2 \right]$$

$$V = \pi H \left[\cancel{p^2} + pa + \frac{a^2}{4} - \cancel{p^2} + pa - \frac{a^2}{4} \right]$$

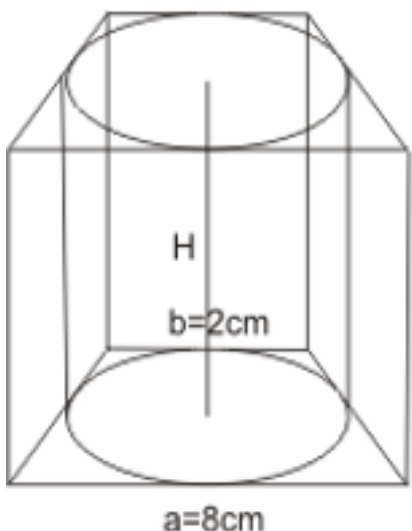
$$V = \pi H \cdot 2pa$$

$$V = 2paH\pi$$

$$V = 2pa \cdot a\pi$$

$$V = 2a^2 p\pi$$

6) Osnova prizme je jednakokraki trapez osnovica 8cm i 2cm. U trapez je upisan valjak. Izračunati razmeru zapremine valjka i zapremine prizme ako je njegova visina jednaka kraku trapeza.

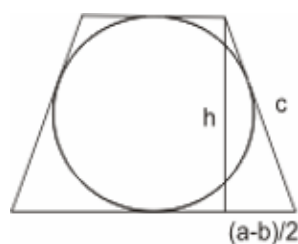


$$a = 8\text{cm}$$

$$b = 2\text{cm}$$

$$H = C$$

$$V_V : V_P = ?$$



Ako pogledamo bazu vidimo da je trapez tangenti četvorougao (može da se upiše krug) pa je:

$$a + b = 2c$$

$$8 + 2 = 2c$$

$$10 = 2c$$

$$c = 5\text{cm} \Rightarrow H = 5\text{cm}$$

Primenom Pitagorine teoreme na trapez:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{8-2}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 25 - 9$$

$$h^2 = 16$$

$$h = 4\text{cm}$$

Površina trapeza je:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4$$

$$P = 20\text{cm}^2$$

Površina kruga je:

$$P = r^2 \pi \text{ gde je}$$

$$r = \frac{h}{2} = 2\text{cm}$$

$$P = 4\pi\text{cm}^2$$

$$V_V : V_P = B_V H : B_P H$$

$$= B_V : B_P$$

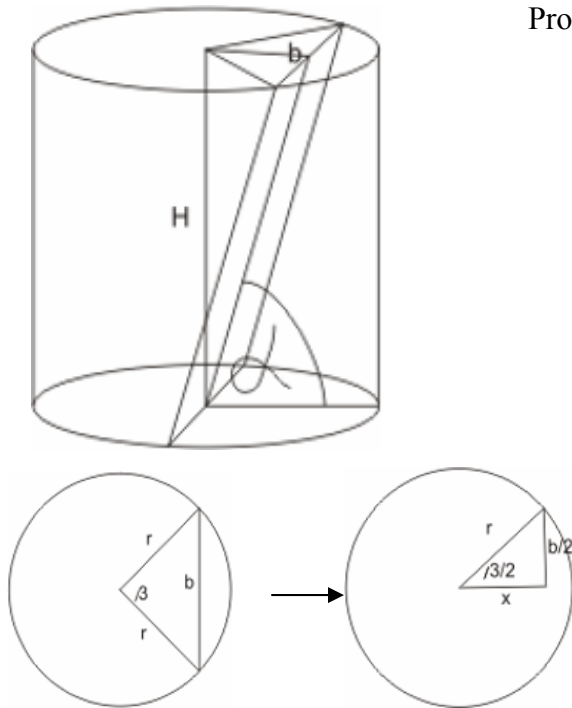
$$= 20 : 4\pi$$

$$= 5 : \pi$$

$$\boxed{V_V : V_P = 5 : \pi}$$

7) Ravan prolazi kroz centar donje osnove kružnog valjka i nagnuta je prema ravni osnove pod uglom α . Ta ravan seče gornju osnovu po tetivi b , kojoj odgovara centralni ugao β . Izračunati zapreminu valjka.

Kod ovog zadatka slika je neophodna i sa nje ćemo uočiti zavisnost izmedju elemenata. Pošto se zapremina valjka računa $V = r^2 \pi H$, naš "posao" je da r i H izrazimo preko datih elemenata α , β i b .



Proučimo najpre gornju bazu!!

Onda je:

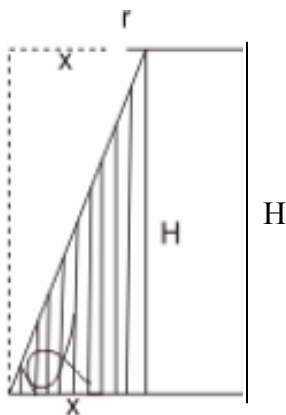
$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{r}$$

$$r = \frac{b}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\text{i } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{x}$$

$$x = \frac{b}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

Dalje ćemo izvući polovinu osnog preseka (onu desnu, naravno)



→ odavde je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{x} \Rightarrow H = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$H = \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

Konačno, zapremina je:

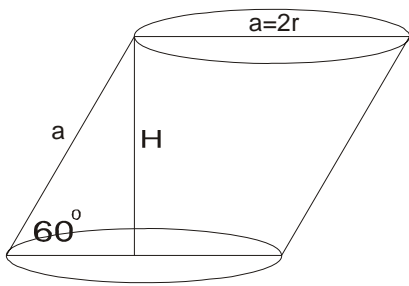
$$V = r^2 \pi H$$

$$V = \left(\frac{b}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \right)^2 \pi \cdot \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

$$V = \frac{b^2}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \pi \cdot \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

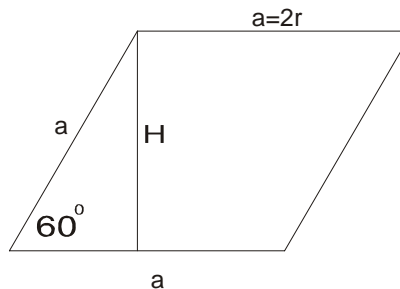
$$V = \frac{b^3 \pi \operatorname{tg} \alpha}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

8) Zapremina kosog valjka kod koga izvodnica zaklapa ugao $\alpha = 60^\circ$ sa ravni osnove je $V = 8\pi\sqrt{3}$. Odrediti poluprečnik osnove ako se zna da je osni presek romb.



$$\frac{V = 8\pi\sqrt{3}}{r = ?}$$

Izvučimo osni presek "na stranu"



Odavde je:

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{a}$$

$$H = a \sin 60^\circ \rightarrow \text{I pošto je } a = 2r \text{ onda je } H = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H = r\sqrt{3}$$

Upakujemo ovde dve dobijene jednakosti:

$$V = r^2 \pi H$$

$$8\cancel{\pi}\sqrt{3} = r^2 \cancel{\pi} H$$

$$r^2 H = 8\sqrt{3}$$

$$r^2 H = 8\sqrt{3}$$

$$r^2 \cdot r\cancel{\sqrt{3}} = 8\cancel{\sqrt{3}}$$

$$r^3 = 8$$

$$r^3 = 2^3$$

$$\boxed{r = 2}$$