LOGARITAMSKE JEDNAČINE - UTVRĐIVANJE

Prije rješavanja logaritamskih jednačina treba se podsjetiti pravila za logaritme.

Logaritamske jednačine su jednačine u kojima se nepoznata (nepoznate) javljaju i pod znakom logaritma. Osobenosti ovih jednačina vezane su za karakteristike logaritamske funkcije, naročito o oblasti definisanosti. Izraz

$$\log_{a(x)} b(x)$$

je definisan akko je $a(x) > 0$, $a(x) \neq 1$ i $b(x) > 0$. Prije rješavanja logaritamske jednačine potrebno je utvrditi intervale definisanosti i rješavati jednačinu samo pod pretpostavkom da se nepoznata nalazi u tim intervalima.

Osnovna ideja je da se jednačina transformiše na što jednostavniji oblik, npr.

$$\log_a b(x) \quad \text{ili} \quad \log_a b(x) = \log_a c(x)$$

Zadatak 1: Riješiti jednačinu: $\log_3(x-1) = 1$

Rješenje: Logaritam je definisan za: $x - 1 > 0$

$x > 1$

Jednačina je ekvivalentna sa:

$x - 1 = 3^1$

$x = 3 + 1$

$x = 4$ Zadovoljen uslov

Zadatak 2: Riješiti jednačinu $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$.

Rješenje: Logaritam je definisan za:

$3 - x > 0 \ \land \ 1 - x > 0$

$x < 3 \ \land x < 1$

$\boxed{x < 1}$

Jednačina je ekvivalentna sa $\log_2(3-x)(1-x) = 3$ (zbir logaritama pretvoren u logaritam prozivoda)

$(3-x)(1-x) = 2^3$

$3 - 3x - x + x^2 = 8$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$\cancel{x_1 = 5}$ međutim ovo rješenje ne zadovoljava uslov

$\boxed{x_2 = -1}$

Zadatak 3: Riješiti jednačinu $\log_5 \frac{2+x}{10} = \log_5 \frac{2}{x+1}$.

Rješenje:

Logaritam je definisan za $\frac{2+x}{10} > 0 \ \wedge \ \frac{2}{x+1} > 0$

$$2 + x > 0 \ \wedge x + 1 > 0$$

$$x > -2 \ \wedge x > -1$$

$$\boxed{x > -1}$$

Pošto su logaritmi istih osnova možemo da izjednačimo:

$$\frac{2 + x}{10} = \frac{2}{x + 1}$$

$$(2 + x)(x + 1) = 20$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\cancel{x_1 = -6} \ \wedge \ x_2 = 3$$

LOGARITAMSKE JEDNAČINE – UTVRĐIVANJE

1. Riješi jednačinu $\log_5 x = 3$.

Rješenje:
Jednačina je definisana za $x > 0$.
$x = 5^3$
$x = 125$

2. Riješi jednačinu $\log_9 x = \frac{1}{2}$.

Rješenje:
Jednačina je definisana za $x > 0$.
$x = 9^{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt{9} = 3$

3. Riješi jednačinu $\log_{13} x^{13} = 26$.

Rješenje:
Jednačina je definisana za $x^{13} > 0, tj. x > 0$.
$\log_{13} x^{13} = 26$
$13\log_{13} x = 26$
$\log_{13} x = 26:13$
$\log_{13} x = 2$
$x = 13^2 = 169$

4. Riješi jednačinu $\log_2(x + 2) = 3$.

Rješenje:
Jednačina je definisana za $x + 2 > 0$.
$\mathrm{x} + 2 = 2^3$
$\mathrm{x} + 2 = 8$
$\mathrm{x} = 6$. Ovo jeste rješenje jer je zadovoljen uslov $6 + 2 > 0$

5. Riješi jednačinu $\log_9(3^x) = 15$.

Rješenje:
Jednačina je definisana za $3^x > 0$.
$3^x = 9^{15}$
$3^x = (3^2)^{15}$
$3^x = 3^{2\cdot 15}$
$3^x = 3^{30}$
$x = 30$

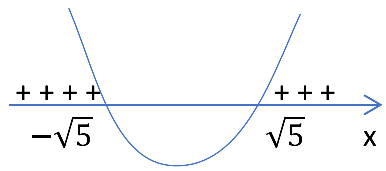
6. Riješi jednačinu $\log_5 25 = 2x$.

Rješenje:
$25 = 5^{2x}$
$5^2 = 5^{2x}$
$2x = 2$
$x = 1$

7. Riješiti jednačine $\log_4(x^2-5)=1$

Rješenje: Jednačina je definisana za $x^2-5>0$

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})>0$$

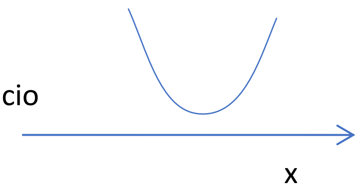


$$\boxed{x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)}$$

$\log_4(x^2-5)=1$
$x^2-5=4^1$
$x^2-5=4$
$x^2=9$
$x_1=\sqrt{9}\qquad x_2=-\sqrt{9}$
$\boxed{x_1=3}\quad\wedge\quad\boxed{x_2=-3}$
Kako je $3>\sqrt{5}$ i $-3<-\sqrt{5}$ uslovi definisanosti su zadovoljeni.

8. Riješiti jednačinu $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)=0$.

Rješenje: Jednačina je definisana za $x^2-5x+7>0$
Kako je $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=25-28=-3<0$ grafik funkcije je cio iznad x-ose, pa je jednačina definisana za $\forall x\in R$



$x^2-5x+7=\left(\frac{1}{3}\right)^0$
$x^2-5x+7=1$
$x^2-5x+6=0$
$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}$
$\boxed{x_1=3}\quad\wedge\quad\boxed{x_2=2}$ Oba rješenja zadovoljavaju uslov definisanosti.

9. Riješiti jednačinu $\log_{x-1}3=2$.

Rješenje: Jednačina je definisana za $x-1>0$

$$\boxed{x>1}$$

$3=(x-1)^2$
$x-1=\sqrt{3}\quad\wedge\quad x-1=-\sqrt{3}$
$\boxed{x_1=1+\sqrt{3}}\quad\wedge\quad \cancel{x_2=1-\sqrt{3}}$

Drugo rješenje ne zadovoljava uslov definisanosti pa ga zbog toga odbacujemo.

10. Riješiti jednačinu $\log_{x+1} 16 = 2$.

Rješenje: Jednačina je definisana za $x + 1 > 0$

$$\boxed{x > -1}$$

$16 = (x + 1)^2$

$x + 1 = \sqrt{16} \quad \wedge \quad x + 1 = -\sqrt{16}$

$x_1 = 4 - 1 \quad \wedge \quad x_2 = -4 - 1$

$\boxed{x_1 = 3} \quad \wedge \quad \cancel{x_2 = -5}$ ne zadovoljava uslov definisanosti

11. Riješiti jednačinu $\log_x 3 = 2$

Rješenje: Jednačina je definisana za $\boxed{x > 0}$

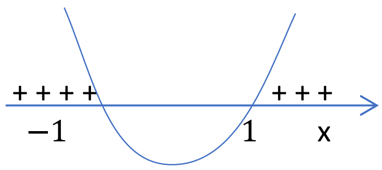
$x^2 = 3$

$\boxed{x_1 = 3} \quad \wedge \quad \cancel{x_2 = -3}$ ne zadovoljava uslov definisanosti

12. Riješiti jednačinu $\log_{x^2-1} 3 = 2$

Rješenje: Jednačina je definisana za $x^2 - 1 > 0$

$$(x - 1)(x + 1) > 0$$



$$\boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$$

$(x^2 - 1)^2 = 3$

$x^2 - 1 = \sqrt{3}$

$x^2 = 1 + \sqrt{3}$

$\boxed{x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}} \quad \wedge \quad \boxed{x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}}$ Oba zadovoljavaju uslov definisanosti.

13. Riješiti jednačinu $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 73) = 2$

Rješenje: Jednačina je definisana za $5 - x > 0 \quad \wedge \quad x^2 - 2x + 73 > 0$

$x < 5 \quad \wedge \quad D < 0 \implies za\ \forall\ x \in R$ je zad. uslov

$$\boxed{x < 5}$$

$x^2 - 2x + 73 = (5 - x)^2$

$\cancel{x^2} - 2x + 73 = 25 - 10x + \cancel{x^2}$

$10x - 2x = -73 + 25$

$8x = -48$

$x = -48 : 8$

$\boxed{x = -6}$